

**Оно што је евентуално остало недоречено на вежбама и предавањима - 2.  
део**

*Њутнова метода за нелинеарне системе једначина*

Посматрајмо нелинеарни систем од  $n$  једначина са  $n$  не познатих

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

који се може записати и као

$$\vec{f}(\vec{x}) = 0,$$

где  $\vec{f}$  представља вектор-функцију  $[f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]$  вектор-аргумента  $\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ .

Итеративни алгоритам за решавање оваког система гласи

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{bmatrix},$$

где се вредности одговарајућих парцијалних извода такође, као и вредности самих функција на десној страни, рачунају у вредностима аргумената добијеним у  $k$ -тој итерацији -  $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ . Последње се скраћено може записати у облику

$$\left[\vec{x}^{(k+1)}\right]^T = \left[\vec{x}^{(k)}\right]^T - \left(W\left(\vec{x}^{(k)}\right)\right)^{-1} \cdot \left[\vec{f}\left(\vec{x}^{(k)}\right)\right]^T,$$

где је

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

тзв. матрица Вронског (њена детерминанта се зове Вронскијан). Наведени алгоритам конвергира уколико почетну итерацију  $[x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ \dots \ x_n^{(0)}]$  изаберемо довољно блиском правом решењу система. Ми то решење не знамо, али треба да се трудимо да вредности датих функција у почетној итерацији буду што ближе нули, као и да детерминанта матрице  $W$  (Вронскијан) буде различита од 0 (како бисмо могли да је инвертујемо).

Подсетимо се да је за дату матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & \dots & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & \dots & K_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix},$$

где је  $K_{ij}$  (кофактор) детерминанта матрице која остане кад из матрице  $A$  уклонимо  $i$ -ту врсту и  $j$ -ту колону **помножена са**  $(-1)^{(i+j)}$ . НЕ ГУБИТИ ИЗ ВИДА ЧИЊЕНИЦУ ДА СЕ У ПОСЛЕДЊЕМ КОРАКУ НА ПОЗИЦИЈУ  $(ij)$  НЕ СТАВЉА  $K_{ij}$  НЕГО  $K_{ji}$ !!!

**Пример.** Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ 2x^2 + y^2 &= 4z \\ 3x^2 + z^2 &= 4y. \end{aligned}$$

узимајући за почетну итерацију  $\begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} \end{bmatrix} = [0.5 \ 0.5 \ 0.5]$

*Решење.* Имамо  $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ ,  $f_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3$ ,  $f_3(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2$  (прво систем морамо преписати у одговарајућем облику из теоријског разматрања). Сада је

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 4x_1 & 2x_2 & -4 \\ 6x_1 & -4 & 2x_3 \end{bmatrix},$$

одакле добијамо

$$\det W = -32x_1x_2x_3 - 32x_1 - 48x_1x_2 - 32x_1x_3$$

и

$$W^{-1} = \frac{1}{-32x_1x_2x_3 - 32x_1 - 48x_1x_2 - 32x_1x_3} \begin{bmatrix} 4x_2x_3 - 16 & -4x_2x_3 - 8x_3 & -4x_2x_3 - 8x_2 \\ -8x_1x_3 - 24x_1 & -8x_1x_3 & 8x_1x_3 + 8x_1 \\ -12x_1x_2 - 16x_1 & 12x_1x_2 + 8x_1 & -4x_1x_2 \end{bmatrix}$$

У конкретном случају, одговарајући итеративни алгоритам гласи

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} - \left[ W \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} \right) \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \left( x_1^{(k)} \right)^2 + \left( x_2^{(k)} \right)^2 + \left( x_3^{(k)} \right)^2 - 1 \\ 2 \left( x_1^{(k)} \right)^2 + \left( x_2^{(k)} \right)^2 - 4x_3^{(k)} \\ 3 \left( x_1^{(k)} \right)^2 - 4x_2^{(k)} + \left( x_3^{(k)} \right)^2 \end{bmatrix}$$

где се под  $\left[ W \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} \right) \right]^{-1}$  подразумева

$$\frac{1}{-32x_1^{(k)}x_2^{(k)}x_3^{(k)} - 32x_1^{(k)} - 48x_1^{(k)}x_2^{(k)} - 32x_1^{(k)}x_3^{(k)}} \begin{bmatrix} 4x_2^{(k)}x_3^{(k)} - 16 & -4x_2^{(k)}x_3^{(k)} - 8x_3^{(k)} & -4x_2^{(k)}x_3^{(k)} - 8x_2^{(k)} \\ -8x_1^{(k)}x_3^{(k)} - 24x_1^{(k)} & -8x_1^{(k)}x_3^{(k)} & 8x_1^{(k)}x_3^{(k)} + 8x_1^{(k)} \\ -12x_1^{(k)}x_2^{(k)} - 16x_1^{(k)} & 12x_1^{(k)}x_2^{(k)} + 8x_1^{(k)} & -4x_1^{(k)}x_2^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Полазећи од  $\begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} \end{bmatrix} = [0.5 \ 0.5 \ 0.5]$ , добијамо

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \frac{1}{-40} \begin{bmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.2500 \\ -1.2500 \\ -1.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8750 \\ 0.5000 \\ 0.3750 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8750 \\ 0.5000 \\ 0.3750 \end{bmatrix} - \frac{1}{-52.75} \begin{bmatrix} -15.2500 & -3.7500 & -4.7500 \\ -23.6250 & -2.6250 & 9.6250 \\ -19.2500 & 12.2500 & -1.7500 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1563 \\ 0.2813 \\ 0.4375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7704 \\ 0.4959 \\ 0.3688 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{bmatrix} = \dots \begin{bmatrix} 0.7884 \\ 0.4968 \\ 0.3702 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{bmatrix} = \dots \begin{bmatrix} 0.7845 \\ 0.4966 \\ 0.3699 \end{bmatrix},$$

Александар Пејчев